

## ЗАНЯТТЯ 3 (2 семестр)

### Тема: АКТИВНИЙ, ЄМНІСНИЙ ТА ІНДУКТИВНИЙ ОПОРИ В КОЛІ ЗМІННОГО СТРУМУ

Будь-який провідник має і *активний опір*, і *індуктивність*, і *ємність*.

**Активним опором** можна вважати будь-який провідник з дуже малою індуктивністю і ємністю. У такому провіднику перетворюється енергія, наслідком чого є виділення тепла. Наприклад, активний опір мають нитки ламп розжарення, елементи нагрівальних приладів, реостати тощо.

**Індуктивним опором** можна вважати провідник з великою індуктивністю, малою ємністю і малим активним опором. Наприклад, індуктивний опір мають будь-які пристрої з котушками або обмотками із осердями з феромагнетика, тобто обмотки трансформаторів, двигунів.

Про **ємнісний опір** говорять тоді, коли активний опір та індуктивність не відіграють істотної ролі в розглядуваних явищах і єдиний параметр, що визначає характер перебігу процесів у системі, є ємність.

#### Коло змінного струму з активним опором.

Розглянемо ділянку електричного кола, в якому протікає змінний струм (рис. 3.1 а).

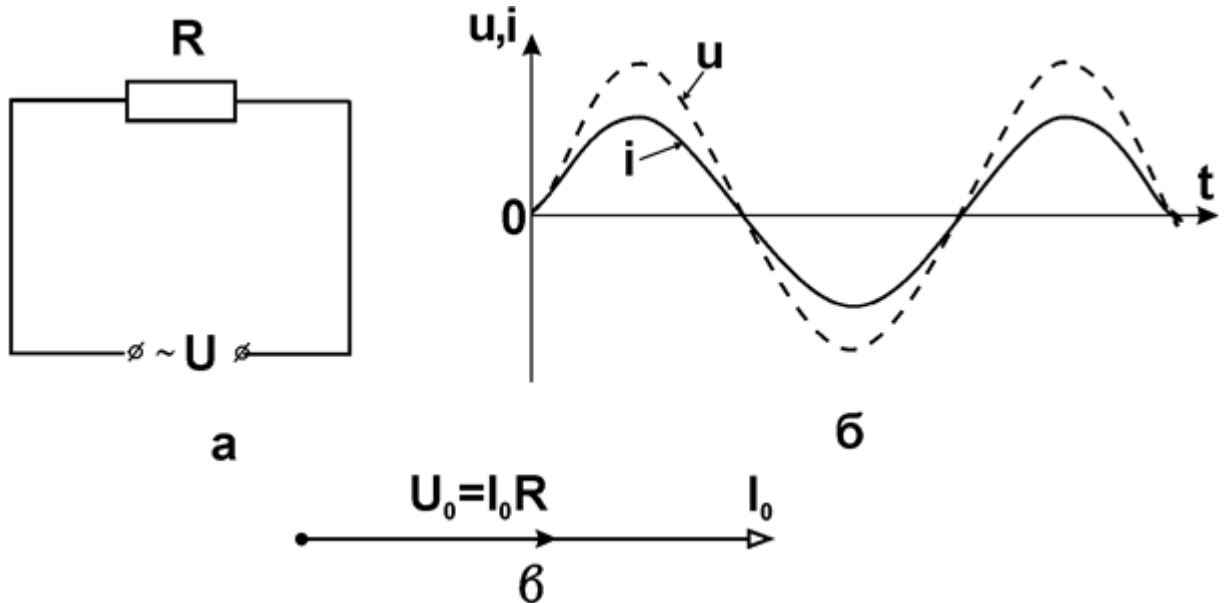


Рис. 3.1

Нехай коло складається тільки з резистора опором  $R$ , до кінців якого прикладена змінна напруга

$$u = U_0 \sin \omega t \quad (1)$$

В колі циркулюватиме струм:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t \quad (2)$$

де  $I_0 = \frac{U_0}{R}$  - амплітудне значення струму.

З аналізу формул (1) і (2) видно, що напруга і струм змінюється в однакових фазах, тобто зсув фаз між струмом і напругою дорівнює нулю. Напруга і струм досягають одночасно максимальних і мінімальних значень (рис. 3.1 б). На векторній діаграмі, де опорною віссю служить вісь струмів, вектор, що зображає амплітуду коливань напруги, збігається з віссю струмів (рис.3.1 в).

### Коло змінного струму з активним опором та індуктивністю

Увімкнемо в коло змінного струму послідовно лампу розжарення (резистор) і котушку індуктивності. Тепер активний опір складається з опору лампи і опору дроту котушки. Якщо вставити всередину котушки залізне осердя, збільшивши її індуктивність, то яскравість нитки лампи зменшиться. Отже, індуктивність чинить опір змінному струму (позначимо індуктивний опір  $X_L$ ).

Розглянемо два випадки

1) Якщо  $R \ll X_L$ .

Тоді активним опором провідників і котушки можна знехтувати і вважати, що такого кола визначається лише реактивним опором котушки індуктивності (рис. 3.2).

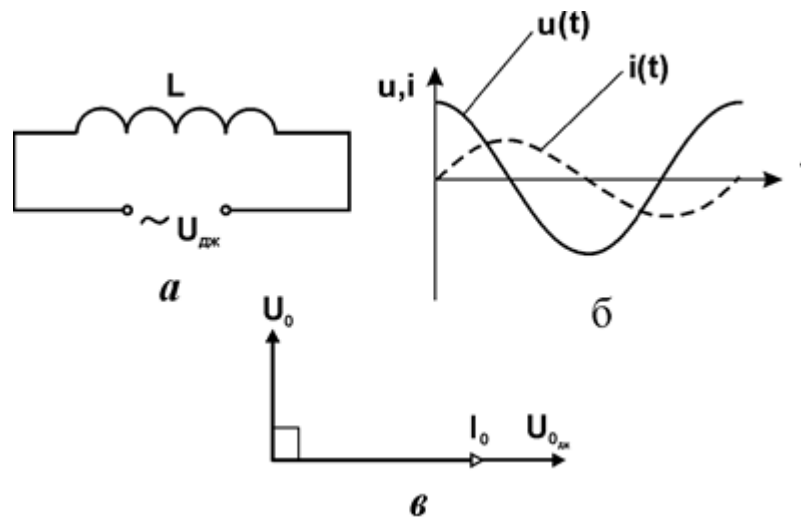


Рис. 3.2

Під впливом змінного магнітного поля в котушці виникає змінна ЕРС самоіндукції  $\mathcal{E}_L = L \frac{di}{dt}$ . Знак мінус в попередній формулі, згідно з правилом Ленца, означає, що електрорушійна сила  $\mathcal{E}_L$  завжди має такий напрям, при якому вона протидіє всякій зміні струму, що її породжує. Таким чином наявність електрорушійної сили самоіндукції створює додатковий опір для протікання змінного струму в колі, яке містить індуктивність. Якщо  $i$  змінюється за законом синуса (рис. 3.2 б), то залежність  $\mathcal{E}_L$  від часу  $t$  має вигляд косинусоїди з від'ємним

значенням в початковий момент часу  $t = 0$ . Для того, щоб струм міг протікати через котушку індуктивності необхідно, щоб прикладена напруга  $U$  зрівноважувала  $\mathcal{E}_L$ , тобто  $U = -\mathcal{E}_L$ . З рис.7.3б і векторної діаграми (рис. 3.3 в) бачимо, що діюче значення

напруги  $U$  на кінцях котушки випереджає струм на  $\frac{\pi}{2}$ . Доведемо це аналітично. Нехай внаслідок приєднання котушки до зовнішнього джерела неї подається напруга  $u_{\text{джк}} = U_0 \sin(\omega t)$ , яка породжує в колі струм  $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$

Тоді в котушці виникає ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} = I_0 \omega L \cos \omega t = I_0 \omega L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (3)$$

З формули (3) отримаємо:

$$u(t) = \mathcal{E}_L = I_0 \omega L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (4)$$

З отриманого виразу випливає, що струм в індуктивності відстає за фазою від напруги на  $\frac{\pi}{2}$ . З формули (4) амплітудне значення напруги на котушці індуктивності рівне  $U_0 = I_0 \omega L$ . Якщо амплітудні значення напруги і сили струму замінити на діючі,

то отримаємо вираз  $I = \frac{U}{\omega L}$ , з якого видно, що величина  $\omega L = X_L$  являє собою реактивний, індуктивний опір в колі змінного струму.

2) Активний опір  $R$  кола за величиною близький до індуктивного опору  $X_L$  (Рис.3.3 а).

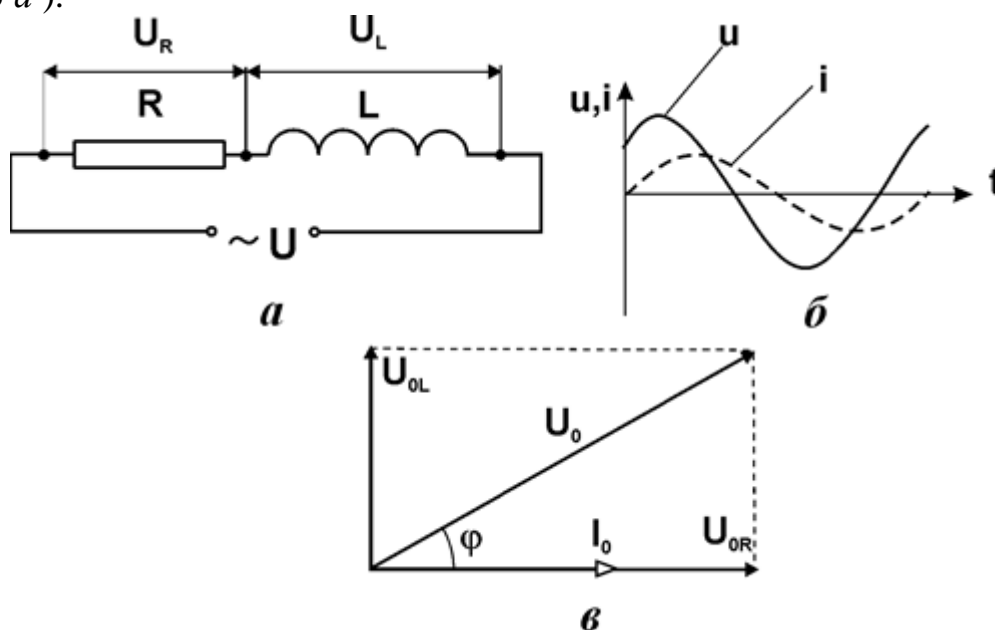


Рис.3.3

Векторна діаграма спадів напруг на ділянці кола, що містить індуктивність і активний опір приведена на рис 3.3 в. Згідно з цією діаграмою амплітудне значення спаду напруги  $U_0$  на ділянці кола можна визначити за теоремою Піфагора

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + U_{0L}^2}$$

Оскільки  $U_{OR} = I_0 R$ , а  $U_{OL} = \omega L I_0$ , то  $U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ . З останньої формули випливає, що вираз  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$  є с повним опором ділянки кола, показаної на рис. 3.3 а.

### Коло змінного струму з конденсатором.

Якщо на деякій ділянці електричного кола є конденсатор, то постійний струм по такій ділянці протікати не може, оскільки обкладки конденсатора розділені шаром діелектрика. Тому фактично електричне коло, до якого входить конденсатор, для постійного струму є розімкнуте.

Змінний струм здатний протікати по колу, до якого входить конденсатор. У цьому можна легко перекопати на простому досліді. Під'єднаємо послідовно з'єднані конденсатор і лампу до джерела змінної напруги і побачимо, що лампа засвітиться. Це означає, що змінний струм протікаючи по колу, до якого входить конденсатор, нагріває нитку розжарення лампи викликаючи її свічення.

Протікання змінного струму через конденсатор пов'язане з його перезарядженням. Якщо в початковий момент часу конденсатор максимально заряджений і заряд на одній з його пластин має максимальне значення, то протягом першої чверті періоду коливання його величина зменшується до нуля. Протягом наступної чверті періоду відбувається накопичення заряду протилежного знаку, після чого процес повторюється у зворотному напрямку. В результаті перезарядження конденсатора струм в колі протягом першої половини періоду протікає в одному напрямку, а протягом другої - в протилежному. Встановимо як змінюється з плином часу сила струму в колі, до якого входить конденсатор, коли опором провідників і пластин конденсатора можна знехтувати.

Напруга на конденсаторі

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C} \quad (5)$$

дорівнює вхідній напрузі на кінцях кола (Рис.3.4 а). Отже

$$q = C U_m \sin(\omega t) \quad (6)$$

Сила струму визначається через похідну від заряду за часом

$$i(t) = U_m C \omega \cos(\omega t) = U_m C \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

Отже коливання сили струму у колі випереджують коливання напруги на конденсаторі на  $\frac{\pi}{2}$  (Рис. 3.4 б).

Векторна діаграма коливань напруги і струму в колі з конденсатором показана на Рис.3.4 в.

Амплітуда сили струму

$$I_m = U_m \omega C$$

Якщо позначити

$$\frac{1}{\omega C} = X_c$$

і замість амплітуди струму і напруги ввести їх діючі значення, то можна записати

$$I = \frac{U}{X_C} = U\omega C \quad (8)$$

З цього рівняння випливає, що величина  $X_C$  обернена до добутку циклічної частоти і ємності конденсатора має розмірність опору і називається ємнісним опором.

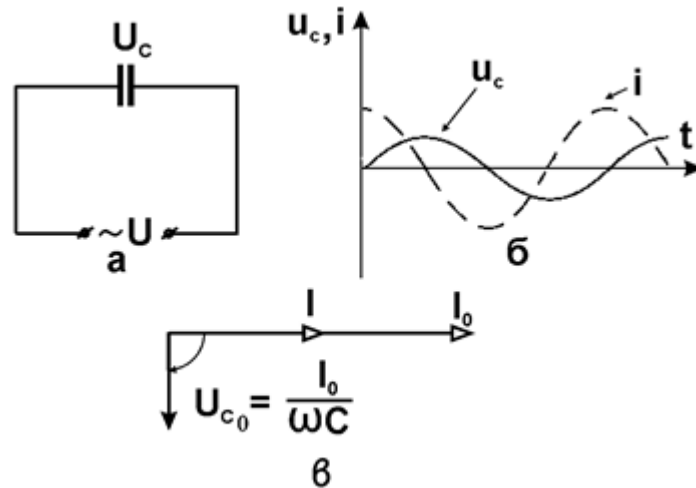


Рис. 3.4

### Коло змінного струму з активним опором і ємністю

Розглянемо коло, яке складається з резистора опором  $R$  і конденсатора ємністю  $C$ , з'єднаних послідовно, і джерела змінної напруги  $u = U_0 \sin(\omega t)$  (Рис.3.5 а). У колі виникає змінний струм тієї ж частоти  $\omega$ , амплітудне значення якого, а також зсув фаз між ним та напругою визначаються параметрами кола  $R$  і  $C$ . Для визначення  $I_0$  і  $U_0$  скористаємося методом векторних діаграм. За опорну вісь оберемо вісь струмів (Рис.3.5 б), оскільки з'єднання елементів кола послідовне і струм в усіх ділянках кола однаковий.

Змінний струм викликає спад напруги на резисторі  $R$ , амплітуда якої дорівнює  $U_{0R} = I_0 R$ , а величини  $u_R$  і  $i$  коливаються в однаковій фазі. Тому на осі струмів відкладаємо вектор  $U_{0R}$ , що відповідає в певному масштабі величині  $I_0 R$ . Коливання напруги на ємності відстають від струму на  $\frac{\pi}{2}$ , тому вектор  $U_{0C}$  повернутий відносно струму на кут  $\frac{\pi}{2}$  за рухом стрілки годинника. Сумарний спад напруги в колі  $U_0$  дорівнює векторній сумі спадів напруг  $U_{0R}$  і  $U_{0C}$ .

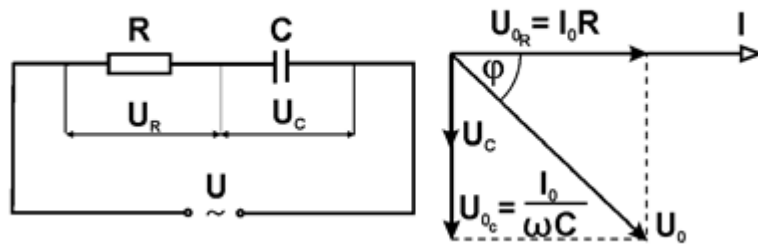


Рис. 3.5

З рис. 7.6б видно, що

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + U_{0C}^2} = \sqrt{(I_0 R)^2 + \left(\frac{I_0}{\omega C}\right)^2} = I_0 Z, \quad (9)$$

звідки

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{Z}, \quad (10)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

де величина

називається повним опором ділянки кола

змінного струму, що містить активний опір і ємність. Оскільки  $U_0 = U\sqrt{2}$  і  $I_0 = I\sqrt{2}$ , то у співвідношенні (10) амплітудні значення  $U_0$  і  $I_0$  можна замінити на їх діючі значення  $U$  і  $I$ . Вираз (10) називають законом Ома для кола змінного струму, що містить  $R$  і  $C$ , який можна сформулювати таким чином: *величина змінного струму прямо пропорційна напрузі, прикладеній до ділянки кола і обернено пропорційна її повному опору.*

### Розв'язування задач

#### Задача 1

Знайти індуктивність котушки, якщо амплітуда змінної напруги на її кінцях дорівнює 100 В, а амплітуда струму в ній дорівнює 15А і частота струму 50 Гц. Активним опором можна знехтувати.

|                     |
|---------------------|
| Дано:               |
| $U_m = 200\text{В}$ |
| $I_m = 15\text{А}$  |
| $\nu = 50\text{Гц}$ |
| $L - ?$             |

Індуктивний опір котушки  $R_L = \omega L$ , де  $\omega = 2\pi\nu$

$$I_m = \frac{U_m}{R_L}, \quad R_L = \frac{U_m}{I_m}$$

Згідно закону Ома

$$\frac{U_m}{I_m} = 2\pi\nu L, \quad L = \frac{U_m}{2\pi\nu I_m}$$

Після підстановки числових значень отримаємо  $L = 0,042 \text{ Гн}$

### Задача 2

Коливальний контур складається з конденсатора ємністю  $400 \text{ пФ}$  і котушки індуктивністю  $10 \text{ мГн}$ . Визначити амплітуду сили струму, якщо максимальний заряд конденсатора дорівнює  $200 \text{ нКл}$ .

Дано:

$$C = 400 \text{ нФ} = 4 \cdot 10^{-10} \text{ Ф}$$

$$L = 10 \text{ мГн} = 10^{-2} \text{ Гн}$$

$$q_m = 200 \text{ нКл} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$$

$$I_m = \omega \cdot q_m$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I_m = \frac{q_m}{\sqrt{LC}}$$

$I_m - ?$

Відповідь: амплітуда сили струму  $0,1 \text{ А}$ .

### Задача 3

Контур складається з котушки індуктивністю  $28 \text{ мкГн}$ , опору  $1 \text{ Ом}$  і конденсатора ємністю  $2222 \text{ пФ}$ . Яку потужність повинен споживати контур, щоб в ньому підтримувати незатухаючі коливання, при яких максимальна напруга на конденсаторі  $5 \text{ В}$ .

Дано:

$$L = 28 \text{ мкГн} = 28 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$C = 2222 \text{ пФ} = 2,222 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$$

$$R = 1 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 5 \text{ В}$$

$P - ?$

Потужність, яка споживається контуром, повинна компенсувати теплову потужність, яка виділяється на опорі:  $P = I_D^2 R$

Згідно закону збереження енергії  $\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$ , а  $I_D = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ , тому

$$I_D = U_0 \sqrt{\frac{C}{2L}}, \quad P = U_0^2 \frac{CR}{2L}$$

Підставивши числові значення, отримаємо  $P \approx 1 \text{ мВт}$